$$y = \left| \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right|$$

124

$$y = \left| \cos\left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right|$$

125

$$y = \operatorname{tg}\left| x - \frac{4}{3}\pi \right|$$

126

$$y = \left| \operatorname{cotg}\left(\frac{2}{3}\pi - x \right) \right|$$

127

$$y = -2\operatorname{sen} x$$

128

$$y = \frac{3}{2}\operatorname{cotg} x$$

129

$$y = -\operatorname{tg} 2x$$

130

Attraverso il grafico della funzione coseno, rispondi alle seguenti domande:

- a.Risolvi l' equazione $\cos x = 0$ nell'intervallo $[\,0\,;2\pi\,]$
- b.Quante soluzioni possiede l'equazione $\cos x = 0{,}5$ nell'intervallo $[\,0\,;\ \pi\,]$

131

Attraverso il grafico della funzione seno, rispondi alle seguenti domande:

- a.Risolvi l'equazione $\operatorname{sen} x = 0$ nell'intervallo $[0 ; 2\pi]$
- b.Quante soluzioni poissiede l'equazione $\operatorname{sen} x = 0{,}5$ nell'intervallo $[-\pi ; 2\pi]$

132

Mediante la circonferenza goniometrica, detrmina le variazioni della della funzione coseno nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right]$

<<<<>>>>

<u>Determina $\operatorname{sen} x$ sapendo che:</u>

133

$\cos x = -0{,}3$ e $0 < x < \pi$

134

Determina $\cos x$ sapendo che: $\operatorname{sen} x = 0{,}5$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

135

Utilizzando la circonferenza goniometrica, dimostra che:

- a.$\cos(-x) = \cos x$ e $\operatorname{sen}(-2\pi - x) = -\operatorname{sen} x$
- b.$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$
- $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x$ e $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\operatorname{sen} x$

<<<<>>>>

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche:

136

$\cos x\left(\cos x - 1 \right) = 0$ $\left(R.\ \frac{1}{2}\pi + k\pi\ ;\ 2k\pi \right)$

137

$\frac{4}{3}\operatorname{sen}^2 x = 1$ $\left(R.\ \pm \frac{1}{3}\pi + k\pi \right)$

138

$\operatorname{tg}^2 x + \frac{2}{3}\sqrt{3}\operatorname{tg} x = 1$ $\left(R.\ \frac{1}{6}\pi + k\pi\ ;\ -\frac{1}{3}\pi + k\pi \right)$

139

$\operatorname{tg}^2 x + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg} x = 0$ $\left(R.\ k\pi\ ;\ -\frac{1}{6}\pi + k\pi \right)$

140

$\operatorname{tg}^2 x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg} x = -1$ $\left(R.\ \frac{1}{6}\pi + k\pi\ ;\ \frac{1}{3}\pi + k\pi \right)$

141

$6\cos^3 x - 7\sqrt{3}\cos^2 x - 7\sqrt{3}\cos x + 6\operatorname{sen}^2 x + 6\cos x = 0$ $\left(R.\ \pi + 2k\pi\ ;\ \pm \frac{1}{6}\pi + 2k\pi \right)$

142

$\cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ $\left(R.\ \frac{1}{2}\pi + 2k\pi \right)$

<<<<>>>>

Risolvi le seguenti equazioni omogenee o riducibili a omogenee:

143

$$2 \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec}^2 x \qquad \left(R.\ \frac{1}{4}\pi + k\pi \right)$$

144

$$\cos^2 x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen} x \cos x \qquad \left(R.\ \frac{1}{6}\pi + k\frac{\pi}{2} \right)$$

145

$$\cos x - \operatorname{sen} x = 0 \qquad \left(R.\ \frac{1}{4}\pi + k\pi \right)$$

146

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} \operatorname{cosec} x + 2\sqrt{3} = \operatorname{cotg} x \qquad \left(R.\ -\frac{1}{3}\pi + k\pi \right)$$

147

$$4 \operatorname{sen} x \cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen}^2 x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \qquad \left(R.\ \frac{1}{3}\pi + k\pi\ ;\ \frac{1}{6}\pi + k\pi \right)$$

148

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x \left(2\cos x - 1 \right) + \cos x = 1 \qquad \left(R.\ -\frac{1}{4}\pi + k\pi \right)$$

149

$$\cos x - \frac{1}{\cos x} + \operatorname{sen} x = 0D \left(R.\ k\pi\ ;\ \frac{1}{4}\pi + k\pi \right)$$

<<<<>>>>

Verifica le seguenti identità goniometriche:

150

$$\left(1 + \operatorname{sen}\alpha\right)^2 + \left(1 - \cos\alpha\right)^2 = 3 + 2\left(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\right)$$

151

$$\cos^2 x + \frac{\left(\operatorname{sen}x + \cos x\right)^2 - \operatorname{sen}^4 x - 2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{cotg}^2 x + \cos^2 x} + \sec x = 1 + \frac{1}{\cos x}$$

152

$$\operatorname{tg}\alpha\left(1 + \operatorname{cotg}\alpha\right) = 1 + \operatorname{tg}\alpha$$

153

$$\frac{\operatorname{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = 1 - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

154

$$\frac{1 + \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} - 1 = \frac{\left(1 + \operatorname{sen}\alpha\right)\left(1 - \operatorname{sen}\beta\right)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

155

$$\left(\frac{1 + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}{1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}\right)^2 = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

156

$$\frac{1 + \cos\alpha}{1 + \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\dfrac{\cos\alpha + 1}{\cos\alpha}}{1 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

157

$$3\,\frac{1}{\cos\alpha}+2\,\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{2+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{3-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{tg}\alpha$$

158

$$\frac{(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha)}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha$$

159

$$(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)(1-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)=(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^3-3\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha}$$

160

$$\frac{\cos^2\beta}{\operatorname{sen}\alpha}(1+\operatorname{tg}^2\beta)-\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos\alpha}(1+\operatorname{cotg}^2\beta)=(1-2\operatorname{sen}^2\alpha)\frac{\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}$$

161

$$1-2\cos^2\alpha=\frac{\dfrac{1}{\operatorname{cotg}^2\alpha}-1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$$

162

$$\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}=(1-\cos^2\alpha)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)$$

163

$$\frac{1}{\operatorname{cotg}^2\alpha}\cdot\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha-1+\cos^2\alpha$$

Capitolo IX

<<<<>>>>

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche applicando le formule di addizione e sottrazione

164

$$\operatorname{sen}(45° + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \cos x)$$

$(R.\ x = 90° + k\,360°)$

165

$$\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(x + 45°) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$$

$(R.\ x = k360° \pm 60°)$

166

$$4\cos(x + 30°) = 2\sqrt{3}\cos x - 1$$

$(R.\ x_1 = 30° + k_1 360°;\ x_2 = 150° + k_2 360°)$

167

$$\operatorname{tg}(x + 45°) = 2 + 2\operatorname{tg} x$$

$(R.\ x_1 = 30° + k_1 180°;\ x_2 = 120° + k_1 100°)$

168

$$2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$

$\left(R.\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right)$

169

$$2\cos x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$$

$\left(R.\ -\frac{\pi}{3} + k\pi\right)$

170

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) + 2\cos^2 x = 2$$

$\left(R.\ k\pi\ ;\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)$

171

$$\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x\right)=2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$$ $\left(R.\ \frac{\pi}{6}+k\pi\ ;\ \frac{5}{6}\pi+k\pi\right)$

172

$$4\cos x\,\mathrm{sen}\,x\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\mathrm{sen}^2 x=4\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x-\cos^2 x$$ $\left(R.\ \frac{\pi}{3}+k\pi\right)$

173

$$\mathrm{sen}\,x\left[\mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right]=\cos x\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\cos x\right]$$ $\left(R.\ -\frac{\pi}{12}+k\pi\right)$

174

$$1+\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{6}\pi+x\right)+\cos^2 x$$ $\left(R.\ k\pi\ ;\frac{4}{3}\pi+2k\pi\ ;\frac{5}{3}\pi+2k\pi\right)$

⋖⋖⋖⋖⋗⋗⋗⋗

Calcola $\mathrm{sen}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ sapendo che α e β sono compresi nel I° quadrante ed:

175

$\mathrm{sen}\,\alpha=\frac{1}{2}\ ;\ \mathrm{sen}\,\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

176

$\cos\alpha=\frac{1}{2}\ ;\ \cos\beta=\frac{1}{2}$

177

$\cos\alpha=0{,}9\ ;\ \mathrm{tg}\,\beta=2$

178

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

179

$$\operatorname{sen}\alpha = 0{,}3 \; ; \; \operatorname{tg}\beta = 4$$

180

$$\operatorname{tg}\alpha = 4 \; ; \; \operatorname{tg}\beta = 5$$

<<<<>>>>

Verifica le seguenti identità

181

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} 2\alpha}$$

182

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\cos 2\alpha}$$

183

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha \cos\alpha}$$

184

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$$

185

$$\frac{1 - \operatorname{sen} 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{cotg}\alpha\right)^2$$

186

$$\frac{1 + \operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2}{2\cos^2\alpha}$$

187

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

188

$$\frac{\operatorname{tg}(45° + \alpha)}{\operatorname{tg}(45° - \alpha)} = \frac{1 + \operatorname{sen} 2\alpha}{1 - \operatorname{sen} 2\alpha}$$

<<<<>>>>

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche applicando le formule di duplicazione degli archi

189

$$4\operatorname{sen} x + 3 = 4\cos 2x + 4\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)$$

$$\left(R.\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\ ;\ \operatorname{arcosen}\left(-\frac{5}{6}\right) + k\pi \right)$$

190

$$\frac{2\operatorname{sen} x\cos 2x + \left(\sqrt{3} + 1\right)\operatorname{sen} 2x\,(\operatorname{sen} x - \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x\cos x} = 0 \qquad \left(R.\ \frac{\pi}{3} + k\pi \right)$$

191

$$\frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 0 \qquad \left(R.\ \frac{\pi}{4} + k\pi \right)$$

192

$$\frac{\operatorname{sen}x \operatorname{sen}2x - \cos x \operatorname{sen}2x + \left(\sqrt{2} - 2\operatorname{sen}x\right)\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}x\cos x\operatorname{sen}2x}$$

$$\left(R.\ \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$$

193

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}x = 0 \qquad \left(R.\ k\pi\,;\ \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right)$$

194

$$4 - 4\cos^2 x + 4\cos 2x - 3 = 0 \qquad \left(R.\ \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right)$$

<<<<>>>>

<u>Risolvi le seguenti equazioni utilizzando le formule per la moltiplicazione degli archi</u>

196

$$\operatorname{tg}x\left(\operatorname{tg}x - 2\operatorname{tg}3x\right) = 3 \qquad \left(R.\ \pm\frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \right)$$

197

$$\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}2x} = \frac{1}{3}\operatorname{cotg}x + \frac{1}{3}\operatorname{cotg}3x \qquad \left(R.\ \pm\frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \right)$$

198

$$\cos 6x + 2\cos^2 3x = 0 \qquad \left(R.\ \pm\frac{\pi}{9} + k\frac{2}{3}\pi\,;\ \pm\frac{2}{9}\pi + k\frac{2}{3}\pi \right)$$

199

$$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}3x = 0 \qquad \left(R.\ k\frac{\pi}{2}\,;\ \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right)$$

200

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \qquad \left(R.\ \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\,;\ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right)$$

201

$2\,\text{sen}^3 x - \text{sen}\,3x = 0$ $\left(R.\ k\pi\,;\ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right)$

Capitolo X

<<<<>>>>

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche (anche applicando le formule di prostaferesi)

202

$$\operatorname{sen} x + \cos x \operatorname{tg} 3x - \operatorname{sen} 4x = 0 \qquad \left(R.\ k\frac{\pi}{4} ; \frac{2}{3}k\pi \right)$$

203

$$\operatorname{sen}\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) + \cos(\pi + 4x) = -\cos x \qquad \left(R.\ \frac{1}{2}\pi + k\pi ; \pm\frac{1}{9}\pi + 2k\frac{\pi}{3} \right)$$

204

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}(\pi - 2x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) - \cos^2 x \qquad \left(R.\ k\pi ; -\frac{\pi}{4} + k\pi \right)$$

205

$$\operatorname{sen}^2 x - \frac{\sqrt{3}(\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x)}{3(\cos 3x - \cos x)} = -\cos^2 x \qquad \left(R.\ -\frac{\pi}{6} + k\pi \right)$$

206

$$\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg}(\pi - 2x) + \operatorname{tg}(2\pi - x) = 0 \qquad \left(R.\ k\frac{\pi}{3} \right)$$

207

$$-\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}(2x + 2x) + \cos 3x - \cos x = 0 \qquad \left(R.\ k\pi ; \frac{1}{10}\pi + 2k\frac{\pi}{5} ; -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi \right)$$

<<<<>>>>

Risolvi le seguenti equazioni usando le formule di Werner

208

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = -\frac{1}{2} \qquad \left(R.\ \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\right)$$

209

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} \qquad \left(R.\ \frac{\pi}{12} + k\pi\ ;\ k\pi\right)$$

210

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 6x \operatorname{sen} 3x = 0 \qquad \left(R.\ k\frac{\pi}{5}\ ;\ k\frac{\pi}{4}\right)$$

211

$$\cos x \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi - x\right) = 0 \qquad \left(R.\ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right)$$

212

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche di vario tipo

213

$$\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)\cos x = 0 \qquad \left(R.\ 2k\pi\ ;\ \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

214

$$\cos x\,(2\cos x + 3) = -1 \qquad \left(R.\ \pi + 2k\pi\ ;\ \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)$$

215

$$\operatorname{tg}^2 x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{5} \qquad \left(R.\ \pm\frac{\pi}{10} + k\pi\right)$$

216

$$\operatorname{sen} x\left[2\left(1-\cos^2 x\right)-3\operatorname{sen} x-3\right]=-2 \quad \left(R.\quad -\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{5}{6}\pi+2k\pi\right)$$

217

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\operatorname{sen} x\left(2\cos x-1\right)+4\operatorname{sen} x\operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}\pi-x\right)=\operatorname{sen} x$$

$$\left(R.\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{5}{6}\pi+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \frac{2}{3}\pi+2k\pi\right)$$

218

$$2\cos 2x-\cos^2 x=\operatorname{sen} x\left[\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\operatorname{sen} x\right]$$

$$\left[R.\ \frac{\pi}{6}+k\pi\ ;\ \operatorname{arcotg}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+k\pi\right]$$

219

$$\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{\cos x-1} \quad \left(R.\ 2k\pi\right)$$

220

$$\cos^2 x+\operatorname{sen} x\left(\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen} x\right)=0 \quad \left[R.\ \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

221

$$1-2\operatorname{sen} x\cos x-3\operatorname{sen} 2x=0 \quad \left(R.\ \frac{1}{2}\operatorname{arcosen}\frac{1}{4}+k\pi\right)$$

222

$$\operatorname{sen} x\left(\cos x-\operatorname{sen} x\right)+3=0 \quad \left(R.\ \textit{Assurda}\right)$$

Capitolo XI

<<<<>>>>

Risolvi i seguenti sistemi di equazioni goniometriche

223

$$\begin{cases} 2\,\text{sen}\,x = 1 \\ 2\,\text{sen}\,y = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\left[R.\ \begin{cases} x = \frac{1}{6}\pi \\ y = \frac{1}{3}\pi \end{cases};\ \begin{cases} x = \frac{5}{6}\pi \\ y = \frac{\pi}{3} \end{cases};\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ y = \frac{2}{3}\pi \end{cases};\ \begin{cases} x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \\ y = \frac{2}{3}\pi + 2m\pi \end{cases} \right]$$

224

$$\begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,y} = \sqrt{3} \\ \text{sen}\,y - \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\left[R.\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + 2m\pi \end{cases};\ \ldots \right]$$

225

$$\begin{cases} \text{sen}\,(x+y) - \cos\,(x+y) = 0 \\ 2\cos\,(x-y) = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\left[R.\ \begin{cases} x = \frac{13}{24}\pi \\ y = -\frac{7}{24}\pi \end{cases};\ \begin{cases} x = -\frac{7}{24}\pi + (k+2m)\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{13}{24}\pi + (k-2m)\frac{\pi}{2} \end{cases} \right]$$

226

$$\begin{cases} (\text{sen}\,x + \text{sen}\,y)^2 = 2\,\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y + \frac{3}{4} \\ 4\left(\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y\right) = 1 \end{cases}$$

$$\left[R.\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ y = -\frac{\pi}{6} \end{cases};\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{\pi}{6} \end{cases};\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ y = -\frac{5}{6}\pi \end{cases};\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{5}{6}\pi + 2m\pi \end{cases} \right]$$

227

$$\begin{cases} \text{sen}\,x + \text{sen}\,y - 1 = 0 \\ 4\left(\text{sen}\,x + \text{sen}^2 y\right) - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[R.\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ y = \frac{\pi}{6} \end{cases};\ \begin{cases} x = \frac{5}{6}\pi \\ y = \frac{5}{6}\pi \end{cases};\ \begin{cases} x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi \\ y = \frac{5}{6}\pi + 2m\pi \end{cases} \right]$$

228

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\operatorname{cotg} y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\left[R. \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \\ y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} ; \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ y = \dfrac{2}{3}\pi - m\pi \end{cases} \right]$$

229

$$\begin{cases} 2(\cos x + \cos y) - 1 - \sqrt{3} = 0 \\ 1 + \cos 3x + \cos 3y = 0 \end{cases}$$

$$\left[R. \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2m\pi \end{cases} \ldots \right]$$

230

$$\begin{cases} \sqrt{3}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) + 2 = 0 \\ \sqrt{3}(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\left[R. \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ y = \dfrac{2}{3}\pi + m\pi \end{cases} \ldots \right]$$

231

$$\begin{cases} \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \cos 2y - \dfrac{1}{2} = 0 \\ 2(\cos x - \operatorname{sen} y) + 1 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\left[R. \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} \\ y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} ; \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ y = \dfrac{5}{6}\pi + 2mk \end{cases} \right]$$

232

$$\begin{cases} (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)^2 - 4 = 2\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \\ (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y)^2 - 2\operatorname{tg}^4 y - 8 = 2\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y \end{cases}$$

$$\left[R. \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + m\pi \end{cases} \right]$$

233

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x \\ \cos x + \cos y = 0 \end{cases}$$

$$\left[R. \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \\ y = \dfrac{5}{6}\pi \end{cases} ; \begin{cases} x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2m\pi \end{cases} \right]$$

Capitolo XII

⮜⮜⮜⮜⮞⮞⮞⮞

Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche elementari

234

$\operatorname{tg} 2x > 1$ $\left(R.\ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right)$

235

$2 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} < 0$ $\left(R.\ -\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right)$

236

$\operatorname{tg} x > -1$ $\left(R.\ -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

237

$17 - 9 \operatorname{sen} x < 0$ (*R. Assurda*)

238

$\operatorname{sen} x > -\frac{16}{10}$ (*R. Sempre*)

239

$2 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen} 2x < 2\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)$ $\left(R.\ 0 < x < \frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\pi < x < \frac{5}{4}\pi\ ;\ \frac{7}{4}\pi < x < 2\pi \right)$

240

$$\frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}^2 (\pi - x)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)} > \frac{1}{\operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$\left(R.\ 0 < x < \frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\pi < x < \pi \right)$

241

$$1 - \operatorname{sen}^2\left(2\pi - x\right) + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - 1 > 0$$

$\left(R. \quad \frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi \right)$

242

$$\cos x + \sec x < 2$$

$\left(R. \ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \right)$

243

$$3\operatorname{tg} x < 2\cos x$$

$\left(R. \quad 0 \le x < \frac{\pi}{6} \ ; \ \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi \ ; \ \frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi \right)$

244

$$\frac{\sqrt{2} - 2\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x} + \sec x - \operatorname{cosec} x < 0$$

$\left(R. \quad -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4} \ ; 0 < x < \frac{\pi}{4} \ ; \ \frac{\pi}{2} < x < \pi \right)$

245

$$\frac{\cos x}{2\operatorname{sen} x - 1} > 0$$

$\left(R. \quad 0 < x < \frac{\pi}{6} \ ; \ \frac{5}{6}\pi < x < \pi \right)$

246

$$\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1} > 0$$

$\left(R. \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi \ \ con \ x \neq \frac{3}{4}\pi \right)$

247

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2\operatorname{sen} x > 0$$

$\left(R. \ -\frac{2}{3}\pi < x < 0 \ ; \ \frac{2}{3}\pi < x < \pi \right)$

248

$$\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 2x > 0$$

$\left(R. \ 0 < x < \frac{\pi}{3} \ ; \ \frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi \ ; \ \pi < x < \frac{4}{3}\pi \right)$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni goniometriche elementari

249

$$\begin{cases} \text{tg}\, x > \sqrt{3} \\ 2\ \text{sen}\ > 1 \end{cases}$$

$$\left(R.\quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

250

$$\begin{cases} \text{sen}\, x > \dfrac{1}{2} \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\left(R.\quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi \right)$$

251

$$\begin{cases} \text{tg}\, x > 0 \\ \cos x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\left(R.\quad < x < \frac{5}{4}\pi \right)$$

252

$$\begin{cases} -4\cos^2 x < -3 \\ \sqrt{3} > 2\ \text{sen}\, x \end{cases}$$

$$\left(R.\quad 0 < x < \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{6}\pi\ ;\ \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi \right)$$

253

$$\begin{cases} \text{sen}\, x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 3\ \text{tg}\, x < 0 \end{cases}$$

$$\left(R.\quad \frac{3}{2}\pi < x < \frac{7}{4}\pi \right)$$

Capitolo XIII

<<<<<>>>>

Applicando i teoremi sui traigoli calcola gli elementi incogniti di un triangolo rettangolo ($con\ \alpha = 90°$) sapendo che

254

$\gamma° = 18°\ ;\ b = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ $\left(R.\ \beta° = 72°\ ;\ a = 4\ ;\ c = \sqrt{5} - 1 \right)$

255

$\beta° = 15°\ ;\ b = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

256

$a = 5 - \sqrt{5}\ ;\ \gamma° = 36°$ $\left(R.\ \beta° = 54°\ ;\ b = \sqrt{5}\ ;\ c = \sqrt{25 - 10\sqrt{5}} \right)$

257

$b = \sqrt{10}\ ;\ c = \sqrt{10 - 4\sqrt{5}}$ $\left(R.\ \beta° = 72°\ ;\ \gamma° = 18°\ ;\ a = 2\sqrt{5 - \sqrt{5}} \right)$

258

$\gamma° = 18°\ ;\ c = 2$ $\left[R.\ \beta° = 72°\ ;\ a = 2\left(1 + \sqrt{5}\right)\ ;\ b = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \right]$

259

$a = \left(\sqrt{5} + 1\right)\sqrt{2}\ ;\ \beta° = 18°$ $\left(R.\ \gamma° = 72°\ ;\ b = \sqrt{2}\ ;\ c = \sqrt{10 + 4\sqrt{5}} \right)$

260

$a = 3\sqrt{2}\ ;\ \gamma° = 15°$ $\left[R.\ \beta° = 75°\ ;\ b = \frac{3}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)\ ;\ c = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) \right]$

261

$\beta° = 22°30'\ ;\ c = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$

$\left(R.\quad \gamma° = 67°30'\ ;\ a = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\ ;\ b = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)$

<<<<>>>>

Applicando i teoremi sui triangoli rettangoli risolvi e discuti i seguenti problemi

262

Sia ABC un triangolo rettangolo con i cateti $\overline{AB} = \sqrt{2}$ e $\overline{AC} = \sqrt{6}$. Determina il seno, coseno, e la tangente dell'angolo $A\hat{B}C$.

$\left(R.\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \sqrt{3} \right)$

263

Le due semirette *a* e *b* uscenti dalla stessa origine *O* formano un angolo di 30°. Condotta con origine in *O* una semiretta *c* tale che *b* risulti interna all'angolo acuto formato dalle altre due, si indichi con *P* il punto della semiretta *c* distante *h* da *O*. Determina l'ampiezza dell'angolo formato dalle semirette *b* e *c* in modo che la somma dei quadrati delle distanze di *P* dalle semirette *a* e *b* sia h^2.

$\left(R.\ \textit{Ponendo}\ b\hat{O}c = x°\ ,\ \textit{si ha la soluzione}\ x° = 30° \right)$

264

Sia BOA un quadrante di centro $\underline{O}$ e raggio r , si determini sull'arco AB un punto P in modo che, essendo P′ la sua proiezione su $\overline{OA}$, si abbia:

265

$\overline{AP'} + \overline{PP'} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}\, r$

$\left(R.\ \textit{Ponendo}\ A\hat{O}P = x°,\ \textit{si ha la soluzione}\ x° = 30° \right)$

266

Nel triangolo rettangolo isoscele ABC, l'ipotenusa $\overline{BC}$ ha lunghezza $2a$. Condotta l'altezza $\overline{AH}$ relativa all'ipotenusa, determina su tale altezza un punto P in modo che la somma delle sue distanze dai tre vertici del triangolo sia $\left(1 + \sqrt{3}\right) a$

$\left(\textit{R. Ponendo } P\hat{B}C = P\hat{C}B = x°, \textit{ si ha la soluzione doppia } x° = 30° \right)$

267

Sia dato un angolo retto $X\hat{O}Y$ e due punti A e B sui lati $\overline{OY}$ e $\overline{OX}$, in modo che sia

$$\overline{OB} = \frac{\overline{OA}}{\sqrt{3}}$$

268

Determina un punto P, interno all'angolo retto, con $O\hat{P}A$ retto e $\overline{OP}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{OB}^2$

$\left(\textit{R. Ponendo } A\hat{O}P = x°, \textit{ si ha la soluzione } x° = 60° \right)$

269

Sul cateto $\overline{AC} = a$ del triangolo rettangolo isoscele ABC, determina un punto D, in modo che indicata con E la sua proiezione ortogonale sull'ipotenusa $\overline{BC}$, sia verificata la relazione:

270

$\overline{BD} + \sqrt{2}\,\overline{DE} = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3} a \quad \neg \quad$ cn

271

$\overline{BD} + \sqrt{2}\,\overline{DE} = k\,a$

$\left(\textit{R. Ponendo } A\hat{B}C = x°, \textit{ si ha la soluzione } x° = 30°. \textit{ Una soluzione per } \sqrt{2} \le k \le 2 \right)$

272

In una semicirconferenza di cento O e diemetro $\overline{AB} = 2r$ è condotto il raggio $\overline{OM}$ perpendicolare al diametro. Determina sull'arco BM un punto C in modo che, indicata con D l'intersezione della corda $\overline{AC}$con raggio $\overline{OM}$, si abbia

273

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{OB}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \neg \quad \text{cn}$$

274

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{BC}} = k \left(\textit{R. Ponendo } B\hat{A}C = x^{\circ}, \textit{ si ha la soluzione } x^{\circ} = 30^{\circ}. \textit{Una soluzione per } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq k < \frac{3}{2} \right)$$

275

Sia data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$. Sul raggio $\overline{OA}$ si prenda il punto medio M. Si determini sul raggio $\overline{OB}$ un punto P in modo che, indicata con Q l'intersezione della semicirconferenza con la perpendicolare al diametro condotta da P, si abbia $\overline{QM}^2 + \overline{MP}^2 = h\,\overline{QP}^2$ con $h > 0$.

$$\left(\textit{R. Una soluzione per } h \geq \frac{3}{2} \right)$$

Capitolo XIV

<<<<>>>>

Applicando il teorema della corda, risolvi e discuti i seguenti problemi

276

Sia AD il diametro di una semicirconferenza di raggio r . Si determini su di essa un punto C, indicato con B il punto medio dell'arco AC, sia $2hr$ il perimetro del quadrilatero ABCD con $h > 0$.

$$\left(R.\ \textit{Una soluzione per } 2 < h \leq \sqrt{2} + 1\,;\ \textit{due soluzioni per } \sqrt{2} + 1 < h \leq \frac{5}{2} \right)$$

277

Sia $\overline{AB} = r\sqrt{3}$ una corda di una circonferenza di raggio r . Sul minore dei due archi AB determina unpunto C in modo che, condotta da A la perpendicolare $\overline{AD}$ ad $\overline{AC}$, sia $\sqrt{2}\left(2 + \sqrt{3}\right)r$ il perimetro del quadrialatero convesso ABCD. Generalizza il problema ponendo uguale a $2kr$ il perimetro del suddetto quadrilatero.

$$\left(\begin{array}{l} R.\ \textit{Ponendo } B\hat{A}C = x^\circ,\ \textit{si hanno le due soluzioni } x^\circ = 15^\circ \textit{ e } x^\circ = 45^\circ. \\ \textit{Due soluzioni simmetriche per } \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2} \leq k \leq 1 + \sqrt{3} \end{array} \right)$$

278

Dato il semicerchio di diametro $\overline{AB} = 2r$, si conduca una corda $\overline{AM}$ e sia $\overline{AN}$ la bisettrice dell'angolo$B\hat{A}M$. Determina la posizione della suddetta corda $\overline{AM}$ (e quindi della corrispondente corda $\overline{AN}$) in modo che il perimetro del quadrilatero convesso ABNM sia uguale a $5r$. Generalizza il problema ponendo uguale a $2kr$ il perimetro del suddetto quadrilatero convesso.

$$\left(\begin{array}{l} R.\ \textit{Ponendo } B\hat{A}M = 2x^\circ,\ \textit{si ha la soluzione doppia } x^\circ = 30^\circ.\ \textit{Una soluzione doppia } x^\circ = 30^\circ \\ \textit{Una soluzione per } 2 \leq k \leq 1 + \sqrt{2}\ ;\ \textit{due soluzioni per } 1 + \sqrt{2} \leq k \leq \dfrac{5}{2} \end{array} \right)$$

279

In un cerchio di raggio r è iscritto il quadrato ABCD. Determina sull'arco AB un punto P in modo che sia $2r\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ la somma delle sue distanze dai quattro vertici del quadrato. Generalizza il problema ponendo uguale a kr la somma delle suddette distanze.

$$\left(\begin{array}{l} R.\ \textit{Ponendo } P\hat{A}B = x^\circ,\ \textit{si ha la soluzione doppia } x^\circ = 22^\circ 30'. \\ \textit{Due soluzioni simmetriche per } 2\left(\sqrt{2} + 1\right) \leq k \leq 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \end{array} \right)$$

280

Sia AB un arco quarta parte di una circonferenza di raggio r e di centro O. Determina su di esso un punto P in modo che sia hr il perimetro del quadrilatero OAPB con $h > 0$.Stabilisci quale varole deve avere h affinchè il quadrilatero degeneri in un triangolo rettangolo.

$$\left(\begin{array}{l} R.\ \ \textit{Due soluzioni per } 2 + \sqrt{2} < k \le 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}. \\ \textit{Il quadrilatero degenera in un triangolo rettangolo per } h = 2 + \sqrt{2} \end{array} \right)$$

281

In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}$ è condotta la corda $\overline{AC}$, lato dell'esagono regolare inscritto.Determina sull'arco BC un punto P in modo che il quadrilatero ABPC abbia il perimetro di

$$\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + 3 \right) r.$$

282

Generalizza il problema ponendo uguale a $(k + 3)\, r$ il perimetro del suddetto quadrilatero.

$$\left(\begin{array}{l} R.\ \textit{Ponendo } P\hat{A}C = x°,\ \textit{si hanno le due soluzioni } x° = 15° \ \textit{e } x° = 45° \\ \quad \textit{Due soluzioni per } \sqrt{3} \le k \le 2 \end{array} \right)$$

⋞⋞⋞⋞⋟⋟⋟⋟

Utilizzando le regole per il calcolo dell'area dei triangoli e quadrilateri, risolvi e discuti i seguenti problemi

283

In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ è condotta la corda $\overline{AC} = r\sqrt{2}$. Indica con D ed E due punti situati, rispettivamente, sull'arco AC e sull'arco CB e tali che sia CD = CE, determina l'ampiezza dell'angolo $D\hat{A}E$ in modo che l'area del triangolo ADE sia uguale a $\frac{\sqrt{3}}{4} r^2$. Generalizza il problema ponendo uguale a $\frac{k\, r^2}{4}$ l'area del suddetto triangolo.

$$\left(\begin{array}{l} R.\ \ \textit{Posto } D\hat{A}E = 2x°,\ \textit{si hanno le due soluzioni } x° = 15° \ \textit{e } x° = 30°. \\ \textit{Due soluzioni per } 0 \le k \le 2 \end{array} \right)$$

284

E' dato il settore circolare OAB di centro O, raggio r e ampiezza di $60°$. Determina sull'arco AB un punto C in modo che l'area del quadrilatero convesso OACB sia uguale a $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}r^2$.
Generalizza il problema ponendo uguale a $k\,r^2$ l'area del suddetto quadrilatero.

R. Ponendo $A\hat{O}C = x°$, *si hanno le due soluzioni* $x° = 15°$ *e* $x° = 45°$.
Due soluzioni simmetriche per $\frac{\sqrt{3}}{4} \le k \le \frac{1}{2}$

285

Sopra l'arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio r, determina due punti C e D in modo che $\overline{OD}$ sia la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}C$ e l'area del pentagono convesso OADCB sia uguale a $\frac{3}{4}r^2$ Generalizza il problema ponendo uguale a $k\,r^2$ l'area dela suddetto pentagono.

R. Ponendo $A\hat{O}D = x°$, *si ha la soluzione doppia* $x° = 30°$.
Una soluzione per $\frac{1}{2} \le k \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e due soluzioni per* $\frac{\sqrt{2}}{2} \le k \le \frac{3}{4}$

Capitolo XV

⋞⋞⋞⋞⋟⋟⋟⋟

Applicando il teorema dei seni, calcola gli elementi incogniti di un triangolo qualunque sapendo che

286

$a = 5 + \sqrt{5}$; $b = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$; $\beta° = 18°$

$\left(\begin{array}{l} R.\ \textit{essendo}\ \sqrt{\dfrac{10}{2}} \approx 1{,}58 = b < a \operatorname{sen}\beta° = 5\left(+ \sqrt{5} \right)\dfrac{\sqrt{5} - 1}{4} = \sqrt{5} \approx 2{,}24 \\ \textit{il caso è assurdo} \end{array} \right)$

287

$a = 2\sqrt{5 + \sqrt{5}}$; $b = \sqrt{10}$; $\beta° = 36°$

$\left(\begin{array}{l} R.\ \textit{essendo}\ \sqrt{10} = b \;\; a \operatorname{sen}\beta° = 2\sqrt{5 + \sqrt{5}}\ \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \sqrt{10}, \\ \textit{il triangolo è rettangolo con}\ \alpha° = 90°\ ,\ \gamma° = 54°\ e\ c = \sqrt{10 + 4\sqrt{5}} \end{array} \right)$

288

$a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$; $\beta° = 30°$; $\gamma° = 45°$ $\left(R.\ \alpha° = 105° ;\ b = 2 ;\ c = 2\sqrt{2} \right)$

289

$a = \sqrt{2}$; $\beta° = 60°$; $\gamma° = 45°$ $\left(R.\ \alpha° = 75° ;\ b = 3 - \sqrt{3} ;\ c = \sqrt{6} - 2 \right)$

⋞⋞⋞⋞⋟⋟⋟⋟

Applicando il teorema del coseno, calcola gli elementi incogniti di un triangolo qualunque sapendo che

290

$a = 6\sqrt{3}$; $c = 3\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3} \right)$; $\beta° = 45°$ $\left(R.\ b = 6\sqrt{2} ;\ \alpha° = 60° ;\ \gamma° = 75° \right)$

291

$a = 2\left(3 - \sqrt{3}\right)$; $b = 2\sqrt{3}$; $\gamma° = 60°$

$\left[R.\ c = 3\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) ; \alpha° = 45° ; \beta° = 75° \right]$

292

$a = 2 ; b = \sqrt{2} + \sqrt{6} ; c = 2\sqrt{2}$

$\left(R.\ \alpha° = 30° ; \beta° = 105° ; \gamma° = 45° \right)$

293

$a = 6\sqrt{2} ; b = 6\sqrt{3} ; c = 3\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$

$\left(R.\ \alpha° = 45° ; \beta° = 60° ; \gamma° = 75° \right)$

294

$a = 6\left(1 + \sqrt{3}\right) ; b = 6\sqrt{2} ; c = 12$

$\left(R.\ \alpha° = 105° ; \beta° = 30° ; \gamma° = 45° \right)$

295

Applicando anche il teorema dei seni, risolvi e discuti i seguenti problemi

296

Sia $\overline{AB} = 2r$ il diametro di una semicirconferenza la cui corda $\overline{AC} = r\sqrt{3}$ si conduca per l'angolo acuto $B\hat{A}C$ una semiretta che incontri in P l'arco BC e in Q la tangente alla semicirconferenza in C, in modo tale che sia soddisfatta la relazione:

297

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PC}} = m$$

$\left(R.\ \textit{Una soluzione per } 0 < m \leq 1 \right)$

298

Il triangolo ABC ha l'angolo di vertice B di 30° determina sull'ipotenusa $\overline{BC}$ un punto P in modo che, indicata con H la sua proiezione ortogonale su $\overline{AC}$, si abbia:

$$\frac{\overline{PH} + \overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Generalizza il problema discutendo la relazione:

$\overline{PH} + \overline{PB} = k \cdot \overline{PA}$

$\left(\textit{R. Ponendo } B\hat{A}P = x^\circ \textit{, si hanno le due soluzioni } x^\circ = 45^\circ \textit{ e } x^\circ = 2 \operatorname{arcotg} \frac{5\sqrt{2} - 1}{7} \textit{. Una soluzione per } 1 \le k < 2; \textit{ due soluzioni per } 2 \le k \le \sqrt{5} \right)$

299

Sopra l'arco AB, sesta parte di una circonferenza di centro *O* e raggio *r*, determina un punto M in modo che, condotta per M la parallela al raggio $\overline{OA}$ fino a incontrare in N il raggio $\overline{OB}$ e indicate con M′ e N′ le proiezioni ortogonali di M e N sul raggio $\overline{OA}$, il quadrilatero MM′N′N sia un quadrato.Generalizza il problema ponendo uguale a 2p il perimetro del rettangolo MM′N′N.

$\left(\textit{R. Ponendo } A\hat{O}M = x^\circ \textit{, si ha la soluzione } x^\circ = \operatorname{arcotg} \frac{3 - \sqrt{3}}{2}. \textit{ Una soluzione per } \frac{r\sqrt{3}}{2} \le p \le r \textit{ ; due soluzioni per } r \le p \le r\sqrt{\frac{7 - 2\sqrt{3}}{3}} \right)$

<<<<>>>>

Applicando anche il teorema del coseno, risolvi e discuti i seguenti problemi

300

E' dato il triangol equilatero ABC di lato l , indica con E il punto medio del lato $\overline{AB}$, determina sul lato $\overline{AC}$ un punto D in modo che la somma dei quadrati dei lati del triangolo BED sia $\frac{3}{2} l^2$.

Generalizza il problema ponendo uguale a $k\, l^2$ la somma dei quadrati dei lati del suddetto triangolo.

$\left(\textit{R. Ponendo } \overline{AD} = x \textit{, con } 0 \le x \le l \textit{ si ha la soluzione limite } x = 0 \textit{ e la soluzione ordinaria } x = \frac{3}{4} l. \textit{ Due soluzioni per } \frac{39}{32} \le k \le \frac{3}{2} \textit{ e una soluzione per } \frac{3}{2} < k \le 2 \right)$

301

Sia ABC un triangolo rettangolo con l'ipotenusa $\overline{AB} = l\sqrt{2}$. Per il vertice C si conduca, internamenteall'angolo retto, una semiretta in modo che, detta P la proiezione ortogonale su di essa, sia verificata la relazione $\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = h\overline{PC}^2$

$\left(R.\ \textit{Due soluzioni per } \frac{3}{2} \le h \le 2 \text{ ; } \textit{una soluzione per } h > 2 \right)$

302

Internamente al quadrato ABCD di lato a determina un punto P in modo che l'angolo $A\hat{P}B$ sia retto e che sia $\frac{4 - \sqrt{3}}{2}\, a^2$ la somma dei quadrati delle distanze di P dai quattro vertici del quadrato.Generalizza il problema ponendo uguale a $2k\,a^2$ la somma dei quadrati delle suddette distanze.

$\left(\begin{array}{l} R.\ \textit{Porre } P\hat{A}B = x° \textit{ con } 0° < x° < 90° \text{ ; } \textit{si hanno le due soluzioni simmetriche} \\ x° = 30° \textit{ e } x° = 60° .\ \textit{Due soluzioni simmetriche per } 1 \le k \le 2 \end{array} \right)$

303

Calcola il raggio del cerchi circoscritti e inscritti ai triangoli individuati dai seguenti dati

$a = 34{,}6$	$b = 43{,}5$	$c = 51{,}7$
$a = 57{,}7$	$\alpha = 34° 15' 18''$	$\beta = 67° 8' 12''$
$b = 421{,}3$	$c = 384{,}7$	$\alpha = 22° 43' 50''$
$a = 5374$	$b = 4183$	$\alpha = 98° 47' 55''$

304

Calcola la bisettrice dell'angolo α per i triangoli nei quali è

$\alpha = 72° 40' 10''$	$b = 27{,}4$	$c = 31{,}5$
$\alpha = 58° 20' 12''$	$\beta = 63° 38' 6''$	$a = 53{,}6$
$\alpha = 44° 50' 20''$	$a = 53{,}7$	$b = 68{,}3$
$a = 44{,}5$	$b = 52{,}6$	$c = 61{,}8$

305

Calcola la mediana relativa al lato a per i triangoli nei quali è

$\alpha = 71° 50' 12''$	$b = 34{,}7$	$c = 28{,}6$
$\alpha = 47° 54' 10''$	$\beta = 58° 53' 50''$	$a = 771{,}4$
$\alpha = 63° 40' 12''$	$a = 64{,}5$	$b = 58{,}3$
$a = 441{,}3$	$b = 527{,}4$	$c = 628{,}3$

<<<<>>>>

Risolvi e discuti i seguenti problemi

306

Un trapezio isoscele ABCD inscritto in una semicirconferenza ha la base maggiore $\overline{AB} = 2r$. Determina la misura degli angoli adiacenti alla base maggiore in modo che sia

$\overline{CD} + \overline{CH} = 2kr$ con $\overline{CH}$ altezza del trapezio.

$$\left(R.\ \textit{Una soluzione per } \frac{1}{2} < k \leq 1\ ;\ \textit{due soluzioni per } 1 < k \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$

307

Internamente al quadrato ABCD di lato a determina un punto P in modo che l'angolo $A\hat{P}B$ sia retto e che sia k il rapporto tra la sua distanza del lato $\overline{BC}$ e la sua distanza dal lato $\overline{DC}$.

308

Un trapezio isoscele ABCD inscritto in una semicirconferenza ha la base maggiore $\overline{AB} = 2r$. Determina gli altri lati del trapezio sapendo che misura h il rapporto tra la loro somma e la base maggiore.

$$\left(R.\ \textit{Due soluzioni per } 1 \leq h \leq \frac{3}{2} \right)$$

309

Una semicirconferenza ha il diametro $\overline{AB} = 2r$; nel semipiano che la contiene sia dato sulla tangentein A il punto M tale che $\overline{AM} = 4r$. Determina sulla semirconferenza i punti P per i quali sussista la relazione:

$\overline{MP} = \overline{AP} + k\,\overline{BP}$

essendo k un numero reale assegnato.

$$\left(R.\ \textit{Due soluzioni per } \frac{6}{5} \leq k \leq 2 \right)$$

310

Un trapezio isoscele ABCD inscritto in una semicirconferenza ha la base maggiore $\overline{AB}$ che misura $2r$.Determina la misura degli angoli adiacenti alla base maggiore in modo che sia

311

$\overline{CD} + \overline{BC} = 2kr.$ $\left(\textit{R. Una soluzione per } \dfrac{\sqrt{2}}{2} \le k \le 1 \textit{; Due soluzioni per } 1 < k \le \dfrac{9}{8} \right)$

312

Si consideri una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e un punto C sul prolungamento di $\overline{AB}$ dalla parte di B con $\overline{BC} = r$. Determina sulla circonferenza un punto P in modo che risulti:

$$\frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{\overline{PC}^2} = k \quad \text{con } k > 0 .$$

$\left(\textit{R. Due soluzioni per } 0 < k \le \dfrac{2}{3} \right)$